Prop (Intégration par parties)

a) Si f et g sont de classe C^2 sur I, alors

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

b) Si f et g sont de classe C^1 sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Prop (changement de variable

soient $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$

de classe C^1, alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

Primitive de fonctions rationnelles $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

le calcul se ramène au calcul des primitives suivantes:

1) $\int x^n dx$, 2) $\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx$, 3) $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$

rq:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{te}$

2) $\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \ln|x-a| + C^{te} & \text{si } n=1 \\ \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C^{te} & \text{si } n>1 \end{cases}$

3) $ax+b = \frac{a}{2}(2x+p) + b - \frac{ap}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$

on a : $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \begin{cases} \ln(x^2+px+q)+C & \text{si } n=1 \\ \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+C & \text{si } n>1 \end{cases}$

Reste $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$

on a : $(x^2+px+q)^n = \left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^n \left(\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2 + 1 \right)^n$

on pose $t = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ et on se ramène à $\int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$

par une intégration par parties on obtient une relation entre I_n et I_{n+1} avec $I_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$

$$\left(2n I_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1) I_n \right)$$

$\rightarrow \int (\cos x)^n (\sin x)^m dx$

- si n impair : $n = 2p+2$ on pose $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$

$$\int (\cos x)^n (\sin x)^m dx = \int (\cos^2 x)^p \cos x (\sin x)^m dx$$
$$= \int (1-\sin^2 x)^p (\sin x)^m dx \cos x\, dx$$
$$= \int (1-t^2)^p t^m dt$$

- si m est impair $m = 2q+1$, on pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$

$$\int (\cos x)^n (\sin x)^m dx = \int (\cos x)^n (\sin^2 x)^q \sin x\, dx$$
$$= \int (\cos x)^n (1-\cos^2 x)^q \sin x\, dx = -\int t^n (1-t^2)^q dt$$

- si m et n sont pair, il faut linéariser

en utilisant $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\rightarrow \int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$

on pose $t = \tan \frac{x}{2}$ on a : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

le calcul se ramène à $\int \frac{R(t)}{S(t)} dt$

avec $R(t)$ et $S(t)$ des polynômes.

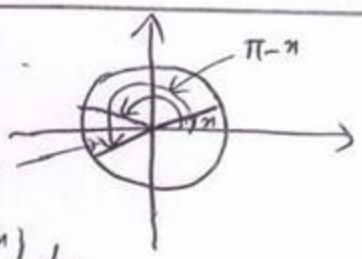
Prop (Règle de Bioche) soit à calculer $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$

on pose $f(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$,

1/ si $f(-x) = -f(x)$ on pose $t = \cos x$

2/ si $f(\pi - x) = -f(x)$ on pose $t = \sin x$

3/ si $f(x+\pi) = f(x)$ on pose $t = \tan x$



$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$

Prop : Pour calculer $\int \frac{P(e^{\alpha x})}{Q(e^{\alpha x})} dx$

avec P et Q des polynômes, on pose

$t = e^{\alpha x} \Rightarrow dt = \alpha e^{\alpha x} dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\alpha t}$

Def: (Intégrals généralisés

1/ si f st continue sur $[a,b[$ on dit que $\int_a^b f(t)dt$ st convergente si $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$ existe et elle st finie

dans ce cas on pose $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$

2/ si f st continue sur $]a,b]$ on dit que $\int_a^b f(t)dt$ st convergente si $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$ existe et elle st finie.

3/ si f st continue sur $]a,b[$, soit $c\in]a,b[$.
on dit que $\int_a^b f(t)dt$ st convergente si les deux intégrals $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergents. et dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

ce résultat ne dépend pas du choix du point c.

Def: 1/ si f st continue sur $]a,b[$ et sur $]b,d[$. On dit que $\int_a^d f(t)dt$ st convergente si les deux intégrals $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^d f(t)dt$ sont convergents

2/ si $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$, si f st continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$

on dit que $\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$ est convergente si pour chaque i, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ est convergente et dans ce cas on pose

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

Exemple: soit $a>0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

2) $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Les intégrales

Prop : si f est R-intégrable sur $[a,b]$ alors

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad (a=0,\ b=1)$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad (a=0,\ b=1)$

Prop :

1) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

2) si $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Prop (1ère formule de la moyenne)

si f est continue sur $[a,b]$ et si g est R-intégrable sur $[a,b]$ avec g garde un signe constant sur $[a,b]$ alors $\exists\, c \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

En particulier si f est continue sur $[a,b]$ alors $\exists\, c \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$.

Prop : 1) si f est continue sur I, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I donc $F'(x) = f(x)$

2) si f est continue, si $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivable alors $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' = v'(x)\,f(v(x)) - u'(x)\,f(u(x))$